Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 6

Jetzt haben wir mit der Analysis von Funktionen mehrerer Variablen angefangen. In der Dimension 1 waren natürliche Definitionsbereiche Intervalle (offene, abgeschlossene oder halboffene, beschränkte oder unbeschränkte). In höheren Dimensionen ist die Auswahl deutlich größer. Deshalb haben wir einige Eigenschaften der Mengen in $\mathbb{R}^n$ eingeführt.

Die Konzepte der Konvergenz und Stetigkeit einer Funktion lassen sich in die höheren Dimensionen übertragen: Es handelt sich um das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Punktes. Wir haben erwähnt, dass es genügt, das Verhalten entlang einer beliebigen Folge zu betrachten. (Man muss aber wirklich alle gegen den betrachteten Punkt konvergenten Folgen berücksichtigen!)

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 15. Juni 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Zeigen Sie Folgendes:

(a) A ist positiv definit genau dann, wenn $\det A > 0$ und $\operatorname{Spur} A > 0$.

(b) A ist negativ definit genau dann, wenn $\det A > 0$ und $\operatorname{Spur} A < 0$.

(c) A ist indefinit genau dann, wenn $\det A < 0$.

2. Beweisen Sie die nachstehenden Behauptungen für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^n$:

(a) $\partial M = \partial(\mathbb{R}^n \setminus M)$,

(b) M ist offen genau dann, wenn $\mathbb{R}^n \setminus M$ abgeschlossen ist.

3. Es seien

$$\begin{aligned} M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 2x+1\}, & Q &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > x^2-1\}, \\ N &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > -x\}, & R &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \le 0\}, \\ P &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2y > x+3\}. \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die Mengen $M \cap N \cap P$ und $Q \cap R$.

(b) Untersuchen Sie, ob diese beschränkt, offen oder abgeschlossen sind.

(c) Bestimmen Sie das Innere, den Rand und den Abschluss der beiden Schnittmengen.

4. Untersuchen Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit.